Staatliches Studienseminar Hameln

1978 – 1988

Festschrift

Herausgegeben vom Kollegium des Staatlichen Studienseminars Hameln

Hameln 1988

Lutz Führer

Mattematik – Laterna magica der Späth-Renaissance

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt.
Der Lehrsatz, nach Pythagoras benannt,
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.
Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es taten kund, geschlachtet und verbrannt,
Ein Hundert Ochsen seine Dankbarkeit.
Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;
Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos, sich dem Licht zu widersetzen,
Verschließen sie die Augen und erzittern.

Mathematik ist sehr wichtig – irgendwie...

Sie werden sich erinnern: a-Quadrat plus b-Quadrat ist c-Quadrat. Den "Pythagoras" kennt noch jeder. Er klingt wie ein potenziertes ABC. Zur höheren Bildung gehört nun einmal Mathematik, irgendwie. Je mehr man davon lernt, desto besser, für unsere Industriegesellschaft. Mehr Mathe soll wieder Pflicht werden, bis zum Abitur.

Und danach?

Das ABC taugt zum Lesen und Schreiben, das Einmaleins zum Rechnen. Wozu taugt die gymnasiale Mathematik?

Zum Abitur.

Und danach?

Hand aufs Herz: Wann haben Sie den berühmtesten Satz der Mathematik zum letztenmal ernsthaft gebraucht? Ich vermute, gar nicht. Wie viele Lehrsätze der Mathematik und wie viele Mathematiker fallen Ihnen noch ein? Taugt die gymnasiale Mathematik etwa gar nicht soviel? Wieso sind sich dann die Verantwortlichen einig, daß wieder mehr Mathematik gelernt werden soll?

Wegen der Industriegesellschaft? Zur Berufs- oder Studienvorbereitung? Juristische und medizinische Kenntnisse wären dafür doch mindestens ebenso wichtig wie der Stoff der höheren Schulmathematik. Den brauchen

Sie wohl kaum, und ich nur für den Unterricht. Selbst der Wirtschaftsminister kommt offenbar mit sehr wenig Mathematik aus:

> Aus einem Hörzu-Interview mit Minister Bangemann:
> "Wann haben Sie zuletzt Ihre Steuererklärung gemacht?"
> – "Oh, das liegt lange zurück."
> "Könnten Sie das überhaupt noch?"
> – "Mit einiger Anstrengung – vielleicht."
> ...
> "Dann wissen Sie vermutlich auch nicht, was ein Paket Brot kostet? Ein Ei?"
> – "Das weiß ich nicht, weil ich das ja nicht einkaufen muß. Brot um die 8o Pfennig."
> ...
> "Wissen Sie denn, wie viele Nullen eine Milliarde hat?"
> – "Ach du lieber Gott! Sieben?"
> "Nein."
> – "Acht?"
> "Nein, neun, Herr Wirtschaftsminister."

Der Stoff ist es demnach offenbar nicht, jedenfalls für die Mehrheit der Gebildeten. Also geht es ums logische Denken. Nach der Schulzeit reift anscheinend bei vielen die Überzeugung, man habe am mathematischen Schulstoff schlüssig und präzise denken gelernt. Dagegen ist kaum etwas zu sagen. Das Argument ist seit der Antike so oft wiederholt worden, daß etwas daran sein muß. Ich glaube es selbst, schon beruflich, aus Selbsterhaltungstrieb. Trotzdem habe ich manchmal Zweifel, denn es dürfte schwerfallen nachzuweisen, daß die Gilde der Mathematiklehrer deutlich besser denken kann als der Rest der Welt. Ich habe unter ausgesprochen schlechten Mathematikschülern sehr gute Denker kennengelernt, von Erwachsenen – siehe oben – ganz zu schweigen. Und hat nicht schon Lichtenberg, auf der anderen Seite, "unter den Mathematikern die größten Plunderköpfe angetroffen, die man sich nur vorstellen kann"?

Nun könnte es ja sein, daß man vom Mathematikunterricht auch ohne äußeren Erfolg geistig profitieren kann, gewissermaßen unter der Hand. Vermutlich macht das ungefähr den öffentlichen Konsens aus. Dann wären die Erfolgskriterien des Mathematikunterrichts nur für den kleinen Kreis künftiger Fachleute halbwegs treffend, für die Mehrheit aber gegenstandslos? Schrecken sie nicht auch ab? Zwingen sie nicht Heerscharen von Jugendlichen zu deprimierender Auswendiglernerei und zum Nachplappern statt Selberdenken? Oder ist es etwa so, daß gerade darin der geheime Sinn für die Mehrheit liegt: sich durchbeißen, um sich schließlich von solchen Übungen abzusetzen? Mathematik als spartanisches Zuchtmittel? Immer noch?

So kann es nicht sein. Aber merkwürdig ist es schon, daß gute Mathematiknoten offenbar nur sehr spezielle Denkleistungen ausweisen, während angeblich die Grundlagen dieser Leistungen, die Gegenstände, die Denkinhalte, die Stoffe, auch denen zum logischen Denken verhelfen, die nachweislich sehr wenig verstanden haben. Logisches Denken ohne Gedanken? Ich möchte dieser Frage unten genauer nachgehen, zuvor aber noch an eine andere Merkwürdigkeit der landläufigen Einstellung zur Mathematik erinnern. Sie wird rasch auf das angesprochene Formalbildungsproblem zurückführen.

Gehen wir einmal davon aus, daß in der deutschen Bildungsöffentlichkeit aus guten Gründen der Konsens herrscht, höhere Mathematik sei ausgesprochen wichtig. Wieso halten sich dann so viele gebildete Deutsche etwas darauf zugute, von Mathematik nie viel verstanden zu haben?

> "Wer nicht wenigstens die ungefähre Anzahl der Klaviersonaten Beethovens oder den Geburtsort Goethes anzugeben vermag, gilt als primitiver Mensch, sich mit mathematischer Unwissenheit zu brüsten, ist dagegen in unserer Kultur gewöhnlich eher von Vorteil als von Nachteil für die eigene Persönlichkeitsbeurteilung seitens anderer",

schrieb zum Beispiel der Philosoph Wolfgang Stegmüller. Ich kann das aus vielen eigenen Erfahrungen bestätigen: Gibt sich jemand in Gesellschaft als Kenner oder gar Bewunderer der Mathematik zu erkennen, so stockt das Gespräch, als schwebe gerade ein zwielichtiger Engel durch den Raum. Charles P. Snow hat es in seiner vielzitierten 'Rede-Lecture' ausführlich beschrieben. In der landläufigen Meinung gehört Mathematik eindeutig zur "Zweitkultur", zur Kultur der technisch-naturwissenschaftlichen Fachleute, deren Vokabular und Wertvorstellungen 'man' nicht kennen muß. Wie die Naturwissenschaften und die Technik ist Mathematik Sache von Spezialisten, mit denen man, Gott sei Dank, als gestandenes Mitglied der in den Medien, in der Politik, in Schule und Verwaltung ideologisch führenden literarisch-künstlerischen "ersten Kultur" nichts gemein hat. Spezialisten kann man bei Bedarf fragen oder kaufen – das große Geld wird ohnehin anderswo verdient.

Wie ist vor diesem Hintergrund der merkwürdig unanfechtbare Status der Mathematik an den Allgemeinbildenden Schulen zu erklären, und wie könnte eine zeitgemäße Rechtfertigung, die heute in allen bildungspolitischen Willenskundgebungen fehlt, aussehen? Ich bin überzeugt, daß darauf nur ernsthaft geantwortet werden kann, wenn man die glattpolierte Fassade der historisch gewachsenen Gymnasialmathematik ein wenig ankratzt und die für viele Schüler recht vordergründigen berufs- oder wissenschaftspropädeutischen Argumente tiefer hängt.

Die Gralshüter

> "Objektivität", schrieb der amerikanische Biologe Heinz von Foerster, "ist die Selbsttäuschung des Subjekts, Beobachtung sei ohne es möglich. Die Anrufung der Objektivität ist gleichbedeutend mit der Abschaffung von Verantwortlichkeit; darin liegt ihre Popularität begründet." (Zitiert nach S. J. Schmidt)

Mit der landläufigen Meinung über den Bildungswert der Schulmathematik korrespondiert deren apodiktisches Auftreten als Vermittlerin objektiver Wahrheiten. Tatsächlich erkauft sie diesen Anspruch in aller Regel, indem sie einem platten 'pragmatischen Idealismus' huldigt, der durch eben die mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnisse unhaltbar geworden ist, auf die sie sich zur Rechtfertigung ihres Status so gerne beruft.

Albert Einstein schrieb 1921:

> "Die Mathematik genießt vor allen anderen Wissenschaften aus einem Grunde ein besonderes Ansehen: Ihre Sätze sind absolut sicher und unbestreitbar, während die aller anderen Wissenschaften zu einem gewissen Grad umstritten und stets in der Gefahr sind, durch neu entdeckte Tatsachen umgestoßen zu werden...
> Aber jenes große Ansehen der Mathematik ruht andererseits darauf, daß die Mathematik es auch ist, die den exakten Naturwissenschaften ein gewisses Maß von Sicherheit gibt, das sie ohne Mathematik nicht erreichen könnten.
> An dieser Stelle taucht nun ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten soviel beunruhigt hat. Wie ist es möglich, daß die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Geistes ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?
> Hierauf ist nach meiner Ansicht kurz zu antworten: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."

Das große Rätsel, von dem hier die Rede ist und das im Zentrum der Auseinandersetzungen um die kopernikanische Wende zum wissenschaftlichen Zeitalter stand, wird in der Schulmathematik nicht erwähnt, und Einsteins Antwort kommt allenfalls marginal zur Sprache, vielleicht beim von Natur aus widerspenstigen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Das ist sicher nicht so, weil diese Sichtweise zu schwierig wäre, sondern weil sie die

Schulmathematik in die erzieherisch und bildungspolitisch heikle Pflicht nehmen würde, noch über die 'ewigen Wahrheiten' deren Relevanz zu stellen.

Warum scheut sie diese Auseinandersetzung? Ich möchte im folgenden zeigen, daß die Gründe keineswegs fachimmanent sind, sondern aus dem 'Reputationskampf' der Mathematiklehrer im vorigen Jahrhundert erklärt werden können. Meine These lautet: Die Gymnasialmathematik überlebte das 19. Jahrhundert nur als Kernfach, weil sie sich rasch von ihren ontologischen Bindungen distanzierte und sich gymnasialer gebärdete als die klassischen Gymnasialfächer. Diese Mimikry war so erfolgreich, daß sie die drei großen Reformanstürme unseres Jahrhunderts fast unbeschadet überdauern konnte. Die platonische Schulmathematik ist damit zum trojanischen Pferd des Neuhumanismus geworden. Gerade das scheint heute ihre Attraktivität für die ratlos-wertkonservative Bildungspolitik der eklektizistischen Postmoderne auszumachen. Ein paar historische Reminiszenzen mögen das verdeutlichen.

Mehr Licht den Ochsen!

Mit Gründung des staatlichen Gymnasiums zu Beginn des vorigen Jahrhunderts wurde Mathematik neben Latein und Griechisch Hauptfach. Das war insofern eine Überraschung, als die Mathematikkenntnisse der Gründerväter eher bescheiden und ihre Einschätzung des allgemeinen Bildungswertes ausgesprochen skeptisch war – Wilhelm von Humboldt äußerte sich gar nicht dazu, Herder indifferent und F. A. Wolf abschätzig. Es handelte sich also weniger um eine Verbeugung vor Grundsätzen der Platonischen Akademie als um den halbherzigen Versuch, nach Jena und Auerstedt Napoleons Erfolgsrezepte auf Preußen zu übertragen. Das delikate Problem war, die allgemeine Bildung im Interesse einer vaterländischen Verteidigung zu heben, ohne so etwas wie die französische Revolution zu riskieren.

Bekanntlich lösten die Neuhumanisten es recht elegant und nachhaltig: Das Verderben des Vaterlandes, hieß es, sei die Folge der inneren Ohnmacht des Alten, der Aufklärung, der Nützlichkeitsphilosophie und des Franzosentums. Jetzt gelte es, die allseitige, harmonische Ausbildung sämtlicher Fähigkeiten des Körpers wie der Seele zu griechischer Kraft und Schönheit zu betreiben. Die Militärs wußten allerdings, daß gute Soldaten aus anderem Holz zu schnitzen sind. Die besten Offiziere Napoleons hatten eine harte Mathematikausbildung an der Pariser Ecole Polytechnique absolviert, und des Generals Vorliebe für die Mathematik war bekannt: "L'avancement et la perfection des mathématiques sont intimement liés à la prosperité de l'Etat." Also bemühte sich Scharnhorst persönlich um eine preußische Version: "Ich setze in das gründliche Studium der Mathematik einen sehr hohen Wert, ich betrachte dasselbe als die Grundlage aller ferneren Geistesbildung und aller anderen Kenntnisse." Das kam zwar in der Tendenz kaum noch über das mittelalterliche Quadrivium hinaus, vom "Avancement" war nicht mehr die Rede, dürfte aber zunächst den Ausschlag gegeben haben.

Süverns Normallehrplan für das Gymnasium enthielt denn auch zum Leidwesen der Altphilologen 60 Wochenstunden Mathematik und inhaltlich etwas mehr, als der heutige Abiturient an mathematischer Substanz zu sehen bekommt, nämlich außer Analysis, Analytischer Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung noch Reihenentwicklungen, numerische Methoden und Sphärische Trigonometrie – lauter anwendungsträchtige Gebiete. Als dieser Lehrplan erschien, ein Jahr nach dem Wiener Kongreß, war er jedoch bereits Makulatur, und es machte nichts mehr aus, daß es kaum geeignete Lehrer für solche Ansprüche gab. Die Restauration hatte schon zum Rückzug geblasen. Der Wolf-Schüler Johannes Schulze übernahm bald für 22 Jahre Süverns Posten als Leiter des Dezernats Höheres Schulwesen und mit ihm die Wolfsche Überzeugung, daß "in einer einzigen Zeile des Cornelius Nepos mehr bildende Kraft liege als in der ganzen Mathematik".

"Mathematicus non est collega", hieß es bis in wilhelminische Zeit. Trotz der formellen Gleichstellung mußten sich die Mathematiklehrer beeilen, jeden Ruch aufklärerischen Ideenguts auszumerzen. Alle auch nur entfernten Anwendungsbezüge wurden bewußt gemieden und dafür die ewigen Wahrheiten als ideale Lehrgegenstände angepriesen.

Adelbert von Chamisso, Exilfranzose und Freund der preußischen Bildungsreformer, gab mit dem kleinen Sonett, das ich eingangs zitierte, unfreiwillig ein hübsches Musterbeispiel für die gängige Methode, halbverdaute mathematische Wahrheiten zu elitären Zuchtmitteln herauszuputzen. Geht man ihm etwas genauer zu Leibe, so wird das vielleicht deutlicher. Vorher sei aber betont, daß es mir nicht um kleinliche Literaturkritik am untauglichen Objekt geht, sondern um Illustration einer fachdidaktischen Erbsünde.

Der sachliche Gehalt des Textes ist eindrucksvoll, schön, einprägsam und falsch. Seit Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien – etwa zur Entstehungszeit des Gedichtchens – gilt der Lehrsatz nicht mehr als 'wahr' wie zu Pythagoras' Zeiten, sondern als sinnvoll, und spätestens seit der experimentellen Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie handelt es sich nicht mehr um göttliches Licht, sondern um eine logische Konsequenz innerhalb eines sehr brauchbaren, wenn auch ungenauen mathematischen Näherungsmodells für den uns umgebenden physikalischen Raum. Die Überzeugung der Idealisten von Platon bis Kant, es handle sich um letztlich evidente Naturerkenntnis, erwies sich als voreilig. 'Wahr' ist der Satz innerhalb einer gewissen Theorie, 'wirklich wahr' – wie Pythagoras und Chamisso meinten – ist er höchstwahrscheinlich nicht, sondern nur weitgehend konsistent mit der Praxis in Alltag und Wissenschaft, also 'nur' 'sehr brauchbar' – in dem Sinne etwa, in dem er für die babylonischen und ägyptischen Fachleute lange vor Pythagoras gegolten hatte, von denen er sein Licht einst bezog. Die Ochsen schließlich hat Pythagoras auch nicht geopfert. Von der Seelenwanderung überzeugt, lehrte gerade er den Respekt vor allem Leben. Die falsche alte Legende, die Chamisso hier bemüht, stellt die Dinge auf den Kopf, indem sie deren ursprünglichen Erkenntniswert verheimlicht.

Verklärung statt Aufklärung war seinerzeit offiziell gefragt. Die zurechtgestutzte Schulmathematik konnte den ästhetisierenden Philologen über den erstklassigen Stammbaum hinaus sogar noch einen besonders raffinierten ideologischen Kunstgriff andienen, der sie zum gymnasialsten aller Fächer machen sollte: **Die unbestreitbaren Verdienste der Mathematik als Magd der Wissenschaften und der Technik beweisen, daß wertfreie Wahrheiten wertvoll sind – und damit letztere wesentlicher als jede Aufklärung realer Verhältnisse, erstere dagegen, als lediglich etwas raffinierte, aber prinzipiell tautologische Folgerungen, obsolet.**

Das Stichwort war gegeben: Erziehung zum logischen Denken an politisch keimfreien, ansonsten beliebigen Gegenständen.

Herder, Freund und Inspirator Wilhelm von Humboldts:

> "Einerlei, ob man an Griechen oder an Römern, an der Theologie oder an der Mathematik denken gelernt hat, d.h. seinen Verstand und sein Urteil, sein Gedächtnis und seinen Vortrag ausgebildet hat, alles gleichviel, wenn sie nur ausgebildet sind."

Erziehung zum folgerichtigen Denken ohne Verantwortungsgefühl gegenüber den Inhalten ist nicht von selbst Erziehung zu intellektueller Redlichkeit, eher ihr Gegenteil. Zuviel Licht blendet, deswegen sollten wir es tunlichst meiden. Objektive Wahrheiten sind keine. Wir haben es außerhalb der Schulmathematik gelernt. Warum lehrt sie es bis heute nicht?

Heine, der Deutsche im französischen Exil, über Chamisso:

"Wer weiß! Wer weiß! Die Seele des Pythagoras ist vielleicht in einen armen Kandidaten gefahren, der durch das Examen fällt, weil er den pythagoreischen Lehrsatz nicht beweisen konnte, während in seinen Herren Examinatoren die Seelen jener Ochsen wohnen, die einst Pythagoras, aus Freude über die Entdeckung seines Satzes, den ewigen Göttern geopfert hatte."

Des Kaisers neue Kleider

Die Methode ist durchsichtig, wenn man sich nur ein wenig auskennt: Man ignoriere einfach – im vorgeblichen Interesse der Erziehung zum scharfen Denken – ein paar reale Tatsachen. Tendenzlöse Halbwahrheiten und sogar die Unwahrheit lassen sich dann im Gewand unscheinbarer, jederzeit eliminierbarer Details und im Schatten göttlichen Lichts ganz unauffällig einschmuggeln. Prüfungen setzen die gewünschten Akzente und ersetzen zugleich fehlende Argumente. Genau das macht die eigentliche Raffinesse, Beliebtheit und Reformresistenz des Verfahrens aus.

Wer nun glaubt, das alles sei überholt, lese einmal unsere heutigen Abituraufgaben oder Ludwig Bauers Analyse der bayerischen. Der opportunistische Idealismus der Gymnasialmathematik hat die drei großen Reformbewegungen unseres Jahrhunderts, die wilhelminische Reformpädagogik, den nationalsozialistischen Utilitarismus und den Strukturalismus der späten sechziger und frühen siebziger Jahre, auf ganz erstaunliche Weise bewältigt und sich dabei sogar noch geläutert. Ich will das an ein paar Beispielen aus dem gegenwärtigen mathematischen 'Curriculum' belegen.

Die erste große Reformwelle zu Beginn unseres Jahrhunderts, nach der Gleichstellung von (altsprachlichen) Gymnasien und Oberrealschulen, brachte dem Mathematikunterricht als sogenannte 'Meraner Reform' eine Pädagogisierung der Elementargeometrie und das Leitprinzip 'Funktionsbegriff' ein. Erstere war als Konzession an die gerade erfundene Schülerorientierung gemeint und sollte Ellen Kays 'Jahrhundert des Kindes' eine 'arbeitsunterrichtliche' Einführung in die Grundlagen der euklidischen Geometrie bieten. Obwohl schließlich sogar ein fachmethodisch lückenloser Weg von der alten Fröbelschen Faltpropädeutik zu einem abbildungsgeometrischen Axiomensystem ausfindig gemacht wurde, das der ehernen Systematik von Euklid-Hilbert logisch gleichwertig ist, schlugen die Bemühungen in ihr Gegenteil um: Aus den Hilfsmitteln zur Einführung in die Geometrie, den geometrischen Abbildungen, wurden nach pädagogischen Mißerfolgen und Unterrichtskürzungen Surrogate eben der Inhalte, die sie grundlegen sollten. Die Abbildungsgeometrie, wie sie heute Stoff der 7. und 8. Klassen ist, besteht im wesentlichen nur noch aus einer unangemessenen Terminologie für gewisse Zeichentätigkeiten. Sie ordnet sich zwar dem Funktionsprinzip unter, ersetzt aber in praxi aus Zeit- und Anspruchsgründen die mühevollen Beweisübungen und Konstruktionsaufgaben, die das einzige logisch anspruchsvolle Argumentationsfeld für diese Klassenstufen und die klassische, wenn auch umstrittene Legitimation für den Formalbildungsanspruch der Gymnasialmathematik darstellten. Das wissenschaftlich vorbildliche euklidische Axiomensystem, das den Bemühungen ihren eigentlichen Sinn gab, bekommen die Schüler nicht mehr zu sehen – selbst ihre Lehrer kennen es kaum noch.

Das Schlagwort von der "Erziehung zum funktionalen Denken" diente als Konzentrationsprinzip zur Entrümpelung und Sequenzierung der Stoffauswahl. Gemeint war die Idee der funktionalen Kopplung zwischen zwei oder mehreren sich verändernden Größen nach dem Vorbild der Newtonschen Dynamik und der vielfältigen Funktionszusammenhänge in Industrie und Wirtschaft. Die mathematischen Darstellungsversuche sollten sich eigentlich daran orientieren und mit der Analytischen Geometrie und Analysis ihren schulischen Abschluß bekommen. Analog zur Geometrie erlag man jedoch dem Fehler, die grundlegenden Begriffe und Rechenverfahren als 'Stoff' in den Vordergrund zu rücken und die schwierigere, aber sinngebende Wechselwirkung zwischen beschriebenem Wirklichkeitsbereich und Beschreibungsmittel auszuklammern.

Die Ursachen für diese Fehlentwicklung sind vielschichtig: statische statt dynamischer Sichtweisen, Komplexität der tatsächlichen Verhältnisse in den Anwendungsbereichen, wissenschaftsorientierte Spezialisierung der Fächer, praxisferne Ausbildung der Mathematiklehrer, Prüfungsrituale usw. Eine gründlichere Untersuchung würde hier zu weit führen. Aus der wohlbegründeten Absicht, ins 'funktionale Denken' einzuführen, ist jedenfalls kaum mehr als eine umfangreiche Einführung des verführerisch eindimensionalen 'Funktionsbegriffs' und des Vokabulars der Vektorgeometrie geworden. Statt wirkliche Zusammenhänge zu beschreiben und kontextrelevante Fragen mit mathematischen Mitteln einer vernünftigen Entscheidung näher zu bringen, werden belanglose Funktionen rezeptmäßig 'diskutiert', Konservendosen und Zäune von rechteckigen Hühnerhöfen optimiert oder abstruse Flächeninhalte mittels Variablensubstitution ausgerechnet, so als wäre der Geist einer Sprache in deren Grammatik beschlossen. Um die Kombinationsfreiheit bei den Abiturprüfungsfächern nicht zu beeinträchtigen, müssen heute sogar die existentiellen Bezüge zur Physik weitgehend verheimlicht werden.

Tatsächlich sind aktuelle und wirklich bedeutsame Anwendungen der Mathematik schwer im Unterricht zu thematisieren. Die plumpen Bemühungen angesehener Fachdidaktiker im Dritten Reich um völkische Erziehung mit Rechenaufgaben zur Ballistik, zum Geldwesen oder zur Mutterhilfe galten denn auch lange nach dem Zweiten Weltkrieg als Beleg für die Aussichtslosigkeit, im Mathematikunterricht ohne tendenzlöse Simplifikation zur Sache zu kommen. Substantiell, wenn auch nicht in der Formulierung, bringt die höhere Schulmathematik es nun einmal nur auf den wissenschaftlichen Stand, der gegen Mitte des 17. Jahrhunderts erreicht war. Es ist meines Wissens bisher auch niemandem der Nachweis gelungen, daß das damals erreichte theoretische Niveau für die technische Rolle der Mathematik in der nachfolgenden Industrieentwicklung besonders charakteristisch wäre. Diese Rolle ist eben im Unterricht nur sehr selten konkretisierbar, und die Gefahr, schiefe Perspektiven zu vermitteln, soll nicht unterschätzt werden.

Die Schulmathematik kann folglich - wie die anderen wissenschaftlichen Fächer auch - nur 'wissenschaftspropädeutisch' wirken, und das wiederum setzt ein einigermaßen klares Bild von dem voraus, was die mathematische Wissenschaft 'eigentlich' ausmacht. Als dieses Bild im Zuge der Oberstufenreform nach dem Sputnikschock und der Studentenrevolte einmal hinterfragt wurde, hing die Durchschlagskraft einschlägiger Aussagen natürlich stark von der Geschicklichkeit der Didaktiker ab, bewährte Traditionen und Berufspraktiken mit aktuellen bildungspolitischen Tendenzen in Einklang zu bringen. Und wieder taugte das alte Lösungsschema: Die Erkenntnis und Beherrschung realer Verhältnisse, hieß es, sei am effektivsten und rationellsten durch das Studium ihrer Strukturen erreichbar, solche Strukturen stelle die reine Mathematik seit jeher zur

Verfügung, und die Anwendung auf die realen Verhältnisse sei bei genügendem Durchblick ganz leicht, also für den Unterricht nebensächlich. Man brauchte nur einige Details auszutauschen - Mengenlehre statt Sachrechnen, mehr Arbeit an den Grundbegriffen in Gleichungslehre und Analysis statt handwerklicher Übungen, Lineare Algebra statt Kegelschnitten und Sphärik - schon war der alte Wein auf Kosten einiger Wirklichkeitsbezüge in neuen Schläuchen.

Die strukturalistische Sichtweise hat sich bekanntlich schnell überlebt. Die gültigen Rahmenrichtlinien für Mathematik atmen aber immer noch deren Geist. Ohne ihre Bildungswirkungen auch nur andeutungsweise in Frage zu stellen, werden sie jetzt mit Blick auf die Computertechnologie überarbeitet. Vermutlich werden abermals nur ein paar Akzente angepaßt, man darf schließlich von einer behördlichen Richtlinienkommission nicht erwarten, daß sie Unterlassungssünden der Fachdidaktik ausgleicht. Die bisherigen Veröffentlichungen machen jedenfalls wenig Mut, an eine Überwindung der weltfremden idealistischen Grundhaltung zu glauben - dazu sitzen die Traditionen wohl zu tief und die Prüfungsgewohnheiten zu fest.

Drei Rechtfertigungen der Schulmathematik

Das sogenannte Mathematik-Curriculum besteht zu großen Teilen aus Themenkreisen, die in fragwürdigen Auseinandersetzungen mit bildungspolitischen Modeströmungen gewachsen sind. Die Stoffauswahl und -anordnung hat im einzelnen eine lange und verwickelte Geschichte, die ich hier nicht ausbreiten kann. Im Groben läßt sich sagen, daß man etwa dem biogenetischen Prinzip gefolgt ist. Der historisch überlieferte und 'organisch bereinigte' Lernprozeß der Menschheit gilt danach auch in Mathematik als 'im wesentlichen' für das Individuum vorbildlich. Dabei sind ihm natürlich 'Irrwege' und allzu verwirrende 'Antizipationen' erlassen, denn die historische Entwicklung der Mathematik fügt sich nicht ohne Unterschlagungen in das schmeichelhafte Klischee eines permanenten Geistesfortschritts.

In zwei Jahrhunderten haben engagierte Fachdidaktiker ein imposantes, scheinbar natürliches Lehrgebäude mit wachsenden Schwierigkeitsniveaus errichtet und stoff- wie unterrichtsmethodisch ausgefeilt, um Jugendliche an 'die Mathematik' heranzuführen. Sie versuchten dabei stets, drei verschiedene Probleme gleichzeitig zu bewältigen:

1. Möglichst viele Schüler sollen zu tieferen mathematischen Studien an den Hochschulen befähigt werden.
2. Durch die Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen soll zu präzisem und folgerichtigem Denken angehalten werden.
3. Alle Schüler sollen ein halbwegs zutreffendes Bild von der Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft bekommen.

Trotz gegenteiliger Äußerungen von Hochschulseite, die es schon immer gab, dürfen die deutschen Gymnasien wohl mit ihrer Lösung des ersten Problems zufrieden sein, auch im internationalen Vergleich. Hier zahlt sich die lange Konzentration auf fast ausschließlich stoffdidaktische Fragen aus. Hinsichtlich des zweiten und des dritten Problems hat man es sich dagegen zu leicht gemacht.

Bei der Schulung logischen Denkens vertraut man nach wie vor auf einen unklaren psychologischen Automatismus, für den es zwar eine altehrwürdige Meinungspresse gibt, aber nur wenige pädagogisch verwertbare Untersuchungen. Ich wäre sehr froh, wenn sich wirklich einmal überzeugende Argumente für die uralte Behauptung fänden, man könne durch das Mathematiklernen besser als auf anderen Wegen zu stringentem Denken finden. Trotz Platon und Piaget habe ich wenig Hoffnung. Bei genauerem Hinsehen verschwimmt nämlich der Begriff. Fragt man jemanden "Was ist Logik? Wer denkt logisch?", so zeigt die Nadel - wie durch eine wundersame Fügung - meist auf ihn selbst. Urteile über das Denken haben nun einmal etwas Zirkuläres an sich.

Die in den Schulen gängige Lösung des zweiten Problems kommt eher einer Verdrängung gleich: Jedem Mathematiktreiben sei, so wird angenommen, stringentes Denken immanent, die Mathematiker aller Zeiten hätten es ja vorgemacht, und man sei folglich in Themenwahl und Lehrmethode diesbezüglich völlig ungebunden. Selbst wenn dem so wäre, Stoffübernahme und Mathematiktreiben sind zweierlei, und die professionellen Mathematiker sind für den Normalschüler zweifelhafte Vorbilder.

Ihre Argumentationsweisen stützen sich auf eng umgrenzte Begriffe und Spielregeln und zeigen bestenfalls im Nachhinein, daß richtig gedacht wurde. Wollte man es den Mathematikern nachmachen, so bedeutete Mathematiklernen ein Wagnis, nämlich diese Spielregeln gerade so weit zu verinnerlichen, daß sie das divergente Denken nicht strangulieren und es

dennoch ständig in hinreichend konkreter Beziehung mit mathematischen Gegenständen halten, um Einfällen eine Chance zur fruchtbaren Konkretion zu geben. Das setzt 'Begabung', nämlich ein ausgeprägtes und sehr widerstandsfähiges divergentes Denken, Fähigkeit und Bereitwilligkeit zur konvergenten Ausarbeitung, vielleicht auch eine bestimmte emotionale Disposition und eine gewisse Affinität des Denkstils zu den Spielregeln voraus, sonst drehen sich die Gedanken immer nur im Kreis, das Denken wird einfallslos und erstarrt rasch zur Rezeptivität. Diese Gefahr ist riesengroß, denn die Anstrengungen stehen meist in einem deprimierenden Verhältnis zum Ertrag. Erstklassige Mathematiker haben deshalb neben ihrer besonderen Begabung eine ausgezeichnete geistige Konstitution, die man bei Schülern im allgemeinen nicht erwarten darf.

Man versucht trotzdem seit Einführung der 'heuristischen Lehrmethode', also des fragend-entwickelnden Unterrichts, dieses Muster für den alltäglichen Unterricht aufzubereiten. Das modische Zauberwort heißt 'Problemorientierung'. Im Gegensatz zum Aufgabenrechnen, das im wesentlichen bekannten Vorlagen folgt, wird dabei ein mathematisch substanzhaltiges 'Problem' gestellt, dessen Lösung zwar in Reichweite der Schülerkenntnisse liegt, aber die Nacherfindung zusätzlicher Begriffe oder Methoden unter mehr oder minder offener Anleitung des Lehrers notwendig macht und dabei zugleich ein 'orientierendes' Licht auf die Qualitäten der neuen Beiträge wirft. Zweifellos wird dabei zum gemeinsamen Nachdenken angehalten. Heuristische Regeln sind unerläßlich und können sogar schrittweise transparent gemacht werden.

Der Teufel steckt jedoch im Detail: Größere Fortschritte in der Sache erfordern viel Zeit und Konzentration. Auch aus Motivationsgründen müssen die Probleme für den Dreiviertelstundentakt abgemagert und aufgesplittert werden. Dabei geht nicht nur die Übersicht leicht verloren, sondern in der Regel auch jede außermathematische Dimension des Leitproblems. Mit dem anschließenden Aufgabentraining können diese Verluste nur schwer ausgeglichen werden. Es trägt vermutlich bei denen, die nicht bis zum Schluß folgen konnten oder wollten, entscheidend zum Vorurteil bei, Mathematik handle von abseitigen Merkwürdigkeiten und ewigen Wahrheiten für Spezialisten.

Aber selbst wenn diese Unterrichtsmethode im Idealfall über mehrere Stunden durchgehalten werden kann und die meisten Schüler mit Interesse dabeibleiben, entstehen Illusionen über Mathematik: Die pädagogisch notwendige, raffinierte Sequenzierung und Ausdünnung der Probleme ersetzt die ursprünglichen Erkenntnisinteressen durch innermathematische Motive und suggeriert damit eine künstliche Folgerichtigkeit und Banalität der Fragestellungen, die es in Wirklichkeit nicht gibt. Die Leistungen der größten Köpfe, von Euklid, Archimedes und Ptolemäus bis Descartes, Leibniz und Newton, müssen dann auch dem mittelmäßigsten Schüler als naheliegende Konsequenzen seines unbescheidenen Wissens erscheinen, so als wäre alles trivial und eindeutig auflösbar, wenn man nur die richtigen Fragen in der technologisch richtigen Reihenfolge stellt.

Ich bin überzeugt, daß das zweite Problem nicht vom dritten getrennt werden kann. Die Auswahl der Problemsequenzen, die das mathematische Denken schulen wollen, ist keineswegs beliebig und darf nicht länger von unterrichtsmethodischen Erwägungen entschieden werden, wenn die Mehrheit der künftigen Nichtmathematiker eine innere Beziehung zu den mathematisch orientierten 'Zweitkulturen' (Sciences – nicht nur Naturwissenschaften) bekommen soll. Niemand verlangt vom Sprachunterricht, nur noch solche Texte zu behandeln, die 'die Schüler selber finden können', und niemand käme auf die Idee, Geschichte, Geographie, Musik, Sport oder Kunst als plausible Produkte naheliegender Gedankenketten auszugeben. Der Mathematikunterricht muß sich endlich aus der idealistischen Zwangsjacke lösen, denn Platon und Kant haben sich geirrt. Mathematik ist wahrscheinlich keine prästabilierte Emanation menschlichen Denkens. Mathematik ist ein nur halbwegs tauglicher Versuch, menschliche Kategorien in die Wirklichkeit hineinzutragen, um sich in ihr besser zurechtzufinden.

Die Schulmathematik hätte genug Möglichkeiten, davon zu handeln. Sie könnte vom Bemühen und Scheitern der historischen Pythagoreer berichten, die die Hoffnung auf wissenschaftliche Naturerkenntnis in die Welt gesetzt haben. Sie könnte aufzeigen, daß und warum der mathematische Stoff, der heute auf der Mittelstufe gelehrt wird, im Zeitalter der Entdeckungen für immer breitere Bevölkerungsschichten relevant wurde. Sie müßte verdeutlichen, wie die höhere Mathematik, die sich dann rasant entfaltete, zum Gegenspieler der scholastischen Theologie wurde und der kopernikanischen Wende zum wissenschaftlichen Zeitalter ihren Stempel aufdrückte. Gelungene und mißlungene Beispiele aus Wissenschaft und Technologie wären zu besprechen. Gerade die Schulmathematik hätte zu erörtern, inwiefern sozialdarwinistische Statistiken und andere Mathematisierungen den Laien verwirren und zu Fehleinschätzungen verleiten können. Und sie hätte vor allem immer wieder an hinreichend einfachen Themen zu verdeutlichen, daß es keine vollständigen mathematischen Antworten auf außermathematische Erkenntnis- oder Anwendungsfragen gibt, sondern 'nur' kritisierbare Hinweise, Vorschläge, Modelle und vielleicht neue, schärfere Fragen.

Sich auf Wirkungszusammenhänge und auf echte Realitätsbezüge einzulassen, hieße allerdings für die Gymnasialmathematik, sich auf unsicheren Boden vorzuwagen. Es ist eben nicht wahr, daß Mathematisierungen realer Probleme in der Regel zu einer eindeutigen Lösung führen. In Wirtschaft und Industrie liefern sie bestenfalls kritische Argumente für vernünftige Entscheidungen. In der Technik sind sie Hilfsmittel, deren Gebrauch Sachkenntnis, Ideenreichtum und Urteilsvermögen für das Machbare voraussetzt. Exakt berechnete Prognosen beruhen auf realen Parametern und vereinfachenden Modellannahmen. Sie können ganz falsch sein, wie etwa die Energiebedarfsschätzungen von 1973, 1975 und 1977 oder Voraussagen der UNO über die Weltbevölkerung. Mathematisch korrekte Optimierungen sind aus ganz ähnlichen Gründen stets nur zweckrelativ brauchbar. Und über den demagogischen Unsinn, der mit statistischen Risikoabschätzungen und Signifikanzberechnungen getrieben wird, sind ganze Bücher geschrieben worden. Selbst die Physik hat inzwischen an wesentlichen Stellen dem Glauben an funktionierende Kausalzusammenhänge abgeschworen.

Allerdings, wollte die Gymnasialmathematik ihre drei Rechtfertigungsprobleme gleichgewichtig bewältigen, so würde sie ihr heutiges Gesicht verlieren. Sie hätte sich offen zu politisieren und in ungewohntem Maße geschichtliche, philosophische, soziologische, technologische und naturwissenschaftliche Elemente und Lehrmethoden anzunehmen. Das könnte sie endlich zum Mittler zwischen den zwei Kulturen werden lassen. Sachwalterin ewiger Wahrheiten könnte sie dann nicht mehr sein, denn noch über die formale Korrektheit einer Aufgabenlösung wäre demonstrativ ihr humaner Sinn zu stellen, ihre Bedeutsamkeit, Plausibilität, Praktikabilität, ihre Nützlichkeit, auch ihr Erkenntniswert und das individuelle Vetorecht des gesunden Menschenverstandes.

Vorläufiges Fazit

Eine solche Reform wäre denkbar, aber vorläufig unerwünscht. Noch paßt die Schulmathematik, wie sie ist. Sie exerziert seit zweihundert Jahren musterhaft vor, wie man die Relevanz der Naturwissenschaften mißbrauchen kann, um die "zweite Kultur" durch Entsinnlichung von der "Erstkultur", nämlich der nach C. P. Snow ideologisch führenden literarisch-künstlerischen, fernzuhalten. Sie lehrt eine Fremdsprache, in der man sich nicht unterhalten kann. Daher – fürchte ich – ist Mathematik neben den lebenden und toten Sprachen als Puffer-Kernfach evident geworden, obwohl sie offensichtlich nicht in den Katechismus des erwachsenen Bildungsbürgers gehört.

> "Der Mathematikunterricht ist insbesondere geeignet, die Schüler in den Aufbau einer zweckfreien, nur auf Erkenntnis ausgerichteten Wissenschaft einzuführen...
> Zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, die Schüler in die für die Mathematik charakteristische Methode einzuführen. Kennzeichnend dafür ist, daß die Ergebnisse der Mathematik nicht auf eine Überprüfung an der Realität angewiesen sind, sondern Gültigkeit und Allgemeinverbindlichkeit haben, da sie nach den allgemein anerkannten Regeln der Logik gewonnen werden..." (Rahmenrichtlinien Mathematik für die gymnasiale Oberstufe in Niedersachsen, S. 7)

Es ging nicht um Aufklärung, und es geht auch heute, in der Späth-Renaissance, nicht darum. Wie die Beispiele veranschaulichen sollten, werden noch immer aus mathematischen Erkenntnissen systematisch opportunistische und wertkonservativ verfügbare Halbwahrheiten, indem man sie des humanen Kontextes beraubt. Manchmal nur kleine Notlügen, im einzelnen, gewiß. Zur Methode geworden, retteten sie die Mathematik als Kernfach durch das 19. Jahrhundert und zementierten ihre willfährige antipolitische Attitüde. Immer noch lehrt die Schulmathematik gegen besseres Wissen 'ewige Wahrheiten' mit schneidigen Richtig-oder-falsch-Urteilen, ohne jede Relevanzkritik und ohne Reflexion am Zivilisationsargument. Und immer noch hilft sie wie ein trojanisches Pferd des Neuhumanismus, naive Kritik des gesunden Menschenverstandes zu desavouieren.

Schulmathematik entmündigt weiterhin den einzelnen Menschen, indem sie wie kein anderes Fach den Mythos von der unbestechlichen Objektivität der Fachleute pflegt. Sie betrügt damit die meisten ihrer Schüler, aus Bequemlichkeit, denn sie löst weder ihr Versprechen ein, die fundamentale Bedeutung der Mathematik für die heutige Industriegesellschaft aufzuzeigen, noch lehrt sie kritisches Denken, denn sie verheimlicht die fragwürdige Seinsweise ihrer Gegenstände. Sie suggeriert ungeniert einen elitären Platonismus, der überhaupt nur solange haltbar ist, wie sie die Erkenntnisse der Wissenschaften ignoriert, auf deren Ansehen sie sich dreist beruft. Sie opfert damit nicht nur das kritische Potential der Mathematik, sie verurteilt zugleich fünf Jahrtausende gemeinsamer Bemühungen von Menschen aus allen Kulturländern um Erkenntnis zur Belanglosigkeit.

> "Vielwisserei", schrieb Heraklit, "lehrt nicht, Verstand zu haben. Sonst hätte sie es Hesiod gelehrt und Pythagoras..."

Literaturverzeichnis

Bauer, L.: Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn 1978.

Blechmann, I. I./Myskis, A. D./Panovko, J. G.: Angewandte Mathematik – Gegenstand, Logik, Besonderheiten. Berlin (DDR) 1984.

Feyerabend, P.: Erkenntnis für freie Menschen. Frankfurt a.M. 1980.

Fischer, R./Malle, G.: Mensch und Mathematik. Zürich 1985.

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2 Bände, Stuttgart 1973.

Führer, L.: Zur Entstehung und Begründung des Analysisunterrichts an allgemeinbildenden Schulen. Der Mathematikunterricht, 27. Jg. 1981, Heft 5, S. 81 – 122.

Herrmann, U. (Hrsg.): Schule und Gesellschaft im 19. Jahrhundert. Weinheim und Basel 1977.

Inhetveen, H.: Die Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts zwischen 1890 und 1914 – Eine sozioökonomische Analyse. Diss., Bad Heilbrunn 1976.

Kreuzer, H. (Hrsg.): Die zwei Kulturen – Literarische und naturwissenschaftliche Intelligenz – C. P. Snows These in der Diskussion. München 1987.

Lietzmann, W.: Der pythagoreische Lehrsatz. Stuttgart 1953.

Lorenzen, P.: Elementargeometrie – Das Fundament der Analytischen Geometrie. Mannheim 1984.

Metzger, W.: Begegnung mit der Wahrheit. Zeitwende – Die Neue Furche, 1965, Heft 6, S. 397 – 403.

Pahl, F.: Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts. Leipzig 1913.

Polya, S.: Schule des Denkens. Bern und München 1949.

Schmidt, S. J.: Selbstorganisation, Wirklichkeit, Verantwortung - Der wissenschaftliche Konstruktivismus als Erkenntnistheorie und Lebensentwurf. Braunschweig 1986.

Schuberth, E.: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Diss., Stuttgart 1970.

Volk, D.: Politisches Lernen im Mathematikunterricht. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1987, Heft 6, S. 224 - 233.

Waerden, B. L. van der: Die Pythagoreer - Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft. Zürich und München 1979.

Wagenschein, M.: Rettet die Phänomene! Scheidewege, 1976, Heft 1, S. 76 - 93.

Wertheimer, M.: Produktives Denken. 2. deutsche Auflage, Frankfurt a.M. 1964.

Erläuterungen zum Titel des Aufsatzes

"Laterna magica", lateinisch für "Zauberlaterne", Vorläuferin des Kinematographen und der Bildzeitung. In einen Zylinder mit engen Sehschlitzen war eine kleine Bildsequenz montiert, die bei Kerzenlicht durch rasche Drehung um ihre eigene Achse die Illusion echter Bewegung vermittelte.

"Späth, Lothar", geb. 1937, schwäbischer Landesvater (1978 - 1988), liberal-konservative Symbolfigur des industriellen Gewerbefleißes.

"Renaissance", französisch für "Wiedergeburt", hier als Anspielung auf die für Späth erfolgreiche baden-württembergische Landtagswahl 1988 gemeint, nach der rechtsradikale Protestwähler wieder im demokratischen Parteienlager beheimatet werden können sollen.

"Mattematik", Wortpersiflage, von "matt, müde, antriebslos", und "Mathematik", griechisch, von "mathema", "das Gelernte, die Kenntnis, das Mutterthema".